

Les produits infinis de Frédéric Riesz

Conférences faites par M. Raphaël
Salem en avril-mai 1950 à Paris.

Notes taken by
John Horvath

pp 1-35

Il existe une fonction continue, à variation bornée $f(x)$ dont les coefficients de Fourier ne sont pas $o(1/n)$. [F. Riesz, Math. Zeitschr. 2 (1918), 312 - 315.]

Considérons le „produit de Riesz“

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1 + \cos 4^k x).$$

Le produit partiel

$$p_N = \prod_{k=1}^N (1 + \cos 4^k x)$$

est un polynôme trigonométrique d'ordre $4^N + 4^{N-1} + \dots + 4$, de la forme $\sum A_\nu \cos \nu x$ avec $A_0 = 1$ et $\nu = \varepsilon_0 4^N + \varepsilon_1 4^{N-1} + \dots + \varepsilon_{N-1} 4$ ($\varepsilon_i = 0, \pm 1$) en vertu de la formule

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)).$$

On a

$$p_{N+1} = p_N = p_N \cos 4^{N+1} x, \text{ donc puisque}$$

$$4^{N+1} - (4^N + 4^{N-1} + \dots + 4) > 4^N + 4^{N-1} + \dots + 4,$$

p_N est une somme partielle de p_{N+1} .
 peer aussi that ν has only one representation of the form *
 la série trigonométrique

pe. $dF(x) \sim 1 + A_1 \cos x + A_2 \cos 2x + \dots$ [Zygmund, 1st ed, p. 87].

(2,1) $1 + A_1 \cos x + A_2 \cos 2x + \dots$ d'une fonction $F(x)$

est une série de Fourier-Stieltjes, parce que ses sommes partielles p_N sont

non-négatives, Considérons la série formellement intégrée

$$(2,2) \quad \frac{A_1}{1} \sin x + \frac{A_2}{2} \sin 2x + \dots$$

elle est la série de Fourier d'une fonction à variation bornée $f(x) = F(x) - x$.
Note $F(0) = f(2\pi)$

Le polynôme $p_{N+1} - p_N$ a exactement 3^N termes non nuls, qui sont tous en module inférieurs à 1, donc le bloc de termes correspondant dans la série (2,2) est majoré par

$$\frac{3^N}{4^{N+1} - 4^N - 4^{N-1} - \dots - 4} = O\left(\left(\frac{3}{4}\right)^N\right)$$

et ainsi la fonction $f(x)$ est continue.

D'autre part $A_{4^k} = 1$. [Zygmund, 130]
(∞ F is not AC)

La fonction $F(x)$ ainsi construite est singulière. En effet les sommes de Fejér

The function F is singular,

that the Fejér sums

de la série $(2,1)$ tendent vers $F'(x)$

presque partout ~~(si l'on supprime la constante~~

~~(Sup. 105 2nd ed I)~~

~~4~~ [Zygmund, 59]; $F'(x)$ existe et est

finie presque partout. D'autre part dans

la série $(2,1)$ il y a des lacunes

entre les termes d'ordre $4^N + 4^{N+1} + \dots$

et $4^{N+1} - (4^N + 4^{N-1} + \dots)$ donc* [Zygmund,

251] p_N converge vers $F'(x)$ presque

partout. Soit E l'ensemble où $F'(x) \neq 0$.

Pour $x \in E$ on a nécessairement

$\cos 4^n x \rightarrow 0$, donc $|E| \stackrel{\text{prop}}{=} 0$. En effet

$\cos 4^n x \rightarrow 0$ implique $\cos^2 4^n x \rightarrow 0$,

donc $\frac{1 + \cos^2 4^n x}{2} \rightarrow \frac{1}{2}$

$$\frac{|E|}{2} + \frac{1}{2} \int_E \cos 2 \cdot 4^n x \, dx \rightarrow 0,$$

mais en vertu du lemme de Riemann-

Lebesgue $\int_E \cos 2 \cdot 4^n x \, dx \rightarrow 0$. On a donc

$F'(x) = 0$ presque partout.

§§ F is cont. & increasing on $[0,1]$ & $\exists F' = 0$ a.e.

* This argument wouldn't seem to work for $\Pi(11 \cos^4 x)$.

4

$$(2.1) 1 + A_1 \cos x + A_2 \cos 2x + \dots$$

Fact La fonction $F'(x)$ est strictement croissante. ^{provs} Supposons par l'impossible que $F'(x)$ est constante dans un intervalle I fermé $(x_0, x_0 + 2\pi/4^m)$ avec m fixé. Dans ces conditions les sommes de Féjér ^{(de la série (2.1))} tendent ^{105 vol I 22nd ed but why uniformly? Since we assume $F \equiv \text{const}$ on I .} uniformément vers zéro dans cet intervalle, ^{since Fejér Th?} donc, puisque la série est lacunaire, les sommes

$$S_{m_k} = p_N = \prod_{k=1}^N (1 + \cos 4^k x)$$

d'ordre $m_k = 4 + 4^2 + \dots + 4^N$ font de même. On a "à plus forte raison" ^{do behave as much the more}

$$\star \int_{x_0}^{x_0 + \frac{2\pi}{4^m}} \prod_{k=1}^N (1 + \cos 4^k x) dx \rightarrow 0. \text{ why } \equiv$$

(Besides) On the other hand,

"D'autre part", en faisant le changement de variables $y = 4^m x$ on a

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_0 + \frac{2\pi}{4^m}} \prod_{k=1}^N (1 + \cos 4^k x) dx &= \frac{2\pi}{4^m} (\text{clearly}) \\ &= \frac{1}{4^m} \int_0^{2\pi} \prod_{k=1}^{N-m} (1 + \cos 4^k y) dy = \frac{2\pi}{4^m} \end{aligned}$$

and this provides a contradiction ■

ce qui fournit une contradiction.

On peut ^{éviter} l'emploi ^{usant} du théorème :
 (selon lequel) ^{accorder les indices} les sommes de Fejér tendent
 uniformément vers $F'(x)$ en considérant
 le produit modifié de Riesz

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} \cos 4^k x\right).$$

Si maintenant $F'(x_0 + \frac{2\pi}{4^m}) - F'(x_0) =$
 $= \int_{x_0}^{x_0 + \frac{2\pi}{4^m}} dF(x) = 0$, alors

$$\int_{x_0}^{x_0 + \frac{2\pi}{4^m}} \prod_1^N \left(1 + \frac{1}{2} \cos 4^k x\right) dx \rightarrow 0$$

mais d'autre part

$$\int_{x_0}^{x_0 + \frac{2\pi}{4^m}} \prod_1^N \left(1 + \frac{1}{2} \cos 4^k x\right) dx \geq$$

$$\geq \left(\frac{1}{2}\right)^m \int_{x_0}^{x_0 + \frac{2\pi}{4^m}} \prod_{m+1}^N \left(1 + \frac{1}{2} \cos 4^k x\right) dx \geq$$

$$\geq \left(\frac{1}{2}\right)^m \frac{2\pi}{4^m}.$$

Les produits de Riesz généralisés

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1 + \alpha_k \cos n_k x),$$

$|\alpha_k| \leq 1$, $n_{k+1}/n_k \geq q > 1$, ont été étudiés par Zygmund [Trans. Am. Math. Soc. 34 (1932), 435-446].

Si $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos n_k x + b_k \sin n_k x$ est la série de Fourier d'une fonction bornée $f(x)$, $|f(x)| \leq M$ et $n_{k+1}/n_k \geq q > 1$, alors $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| + |b_k| < \infty$. [Szidon, Math. Ann. 97 (1927), 675-676].

On peut, sans restreindre la généralité, considérer une série de cosinus $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos n_k x$.

Supposons d'abord que $n_{k+1}/n_k \geq q > 3$.

Considérons alors les polynômes

$$P_N(x) = \prod_{k=1}^N (1 + \varepsilon_k \cos n_k x)$$

avec $\varepsilon_k = \text{sign } a_k$. En vertu de l'hypothèse $n_{k+1}/n_k > 3$ on a $n_{N+1} > 3n_N =$

$$= 2n_N + n_N > 2n_N + 3n_{N-1} > \dots > 2n_N + 2n_{N-1} + \dots,$$

c-à-d. $n_{N+1} - (n_N + n_{N-1} + \dots) > n_N + n_{N-1} + \dots$

donc $P_N(x)$ est une somme partielle de $P_{N+1}(x)$. Pour la même raison un terme $\cos \nu x$ de $P_N(x)$ provient d'une seule combinaison $\nu = \eta_0 n_N + \eta_1 n_{N-1} + \dots$ ($\eta = 0, \pm 1$).

En utilisant la formule de Parseval on obtient

$$\int_0^{2\pi} f(x) P_N(x) dx = \pi \sum_{k=1}^N \varepsilon_k a_k = \pi \sum_{k=1}^N |a_k|$$

et d'autre part

$$\int_0^{2\pi} f(x) P_N(x) dx \leq M \int_0^{2\pi} P_N(x) dx = 2\pi M.$$

Dans le cas où $n_{k+1}/n_k \geq q > 1$ on peut toujours, quel que soit $q_0 > 1$, choisir un entier s tel que

$$\frac{n_{k+s}}{n_k} = \frac{n_{k+s}}{n_{k+s-1}} \dots \frac{n_{k+1}}{n_k} \geq q^s > q_0.$$

On va choisir q_0 supérieur à 3 et à une quantité qu'on précisera plus bas.

Divisons $\sum a_k \cos n_k x$ en $s = s(q_0)$ séries partielles selon le schéma suivant

$$\begin{array}{cccc} a_1 & a_{s+1} & a_{2s+1} & \dots \\ a_2 & a_{s+2} & a_{2s+2} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_s & a_{2s} & a_{3s} & \dots \end{array}$$

Pour la première série partielle considérons les polynômes

$$P_N(x) = \prod_{h=0}^N (1 + \varepsilon_{hs+1} \cos n_{hs+1} x)$$

avec $\varepsilon_j = \text{sign } a_j$. Pour pouvoir utiliser la formule de Parseval il faut vérifier qu'aucun a_j ne va ~~pas~~ se conjuguer avec des coefficients de $P_N(x)$ provenant d'autres termes que celui d'ordre j dans (le produit.) Considérons à cet effet le polynôme

$$Q_N(x) = \prod_{k=1}^N (1 + \alpha_k \cos m_k x)$$

avec $m_{k+1}/m_k \geq \tau$. On a alors

$$\begin{aligned}
m_k + \eta_1 m_{k-1} + \dots + \eta_{k-1} m_1 &< m_k + m_{k-1} + \dots + m_1 \leq \\
&\leq m_k \left(1 + \frac{m_{k-1}}{m_k} + \frac{m_{k-2}}{m_k} + \dots \right) \leq \\
&\leq m_k \left(1 + \frac{1}{\tau} + \frac{1}{\tau^2} + \dots \right) = m_k \left(1 + \frac{1}{\tau-1} \right)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
m_k + \eta_1 m_{k-1} + \dots + \eta_{k-1} m_1 &> m_k - m_{k-1} - \dots - m_1 \geq \\
&\geq m_k \left(1 - \frac{m_{k-1}}{m_k} - \frac{m_{k-2}}{m_k} - \dots \right) \geq \\
&\geq m_k \left(1 - \frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau^2} - \dots \right) = m_k \left(1 - \frac{1}{\tau-1} \right)
\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$m_k (1 - \varepsilon) < m_k + \eta_1 m_{k-1} + \dots < m_k (1 + \varepsilon)$$

quel que soit ε si τ est suffisamment grand.

Si donc on choisit ε , et par conséquent q_0 , tel que

$$\frac{1}{q} < 1 - \varepsilon \quad \text{et} \quad (1 + \varepsilon) < q$$

on aura

$$n_{hs+1} (1 - \varepsilon) \geq q n_{hs} (1 - \varepsilon) > n_{hs}$$

et

$$n_{h_{s+1}}(1+\varepsilon) \leq \frac{1}{q} n_{h_{s+2}}(1+\varepsilon) < n_{h_{s+2}}$$

et on pourra écrire

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) P_N(x) dx &= \sum_{h=0}^N \varepsilon_{h_{s+1}} a_{h_{s+1}} = \\ &= \sum_{h=0}^N |a_{h_{s+1}}| \leq \frac{1}{\pi} M \cdot 2\pi. \end{aligned}$$

En procédant de même pour les autres (s-1) séries on aura démontré le théorème.

Soit n_k une suite croissante d'entiers telle que $n_{k+1}/n_k \geq q > 1$ et a_k une suite avec $a_k \rightarrow 0$. Il existe une fonction intégrable $f(x) \sim \sum \alpha_n \cos nx$ telle que $\alpha_{n_k} = a_k$. [Banach. *Studia Math.* 2 (1930) 207-220].

Ce théorème est une conséquence de la proposition suivante:

A. Soit n_k une suite d'entiers avec

$n_{k+1}/n_k \geq q$ et c_k une suite telle que $|c_k| < 1$.

Il existe une fonction à variation bornée $F(x)$ avec $dF(x) \sim \sum y_n \cos nx$ telle que $y_{n_k} = c_k$.

En effet soit $a_k \rightarrow 0$, alors il existe une suite ε_n convexe et $\varepsilon_n \rightarrow 0$ telle que $|a_k/\varepsilon_{n_k}| \leq 1$. Il existe donc une série de Fourier-Stieltjes $\sum y_n \cos nx$ avec $y_{n_k} = a_k/\varepsilon_{n_k}$, mais alors la série $\sum \varepsilon_n y_n \cos nx$ est une série de Fourier [Zygmund 104, 109] et $\varepsilon_{n_k} y_{n_k} = a_k$.

La démonstration de la proposition A. est encore très facile lorsque $n_{k+1}/n_k \geq q > 3$, car alors en développant formellement le produit

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1 + a_k \cos n_k x)$$

on obtient la série de Fourier-Stieltjes voulue (cf. p. 2.). Dans le cas général où $n_{k+1}/n_k \geq q > 1$ on décomposera la

suite n_k en s suites partielles n_{ks+h}
 $(h=1, 2, \dots, s; k=0, 1, \dots)$ avec $n_{(k+1)s+h} / n_{ks+h} \geq$
 $\geq q^s > q_0$ où q_0 sera choisi d'une façon
 convenable (cf. p. 9) et on appliquera la
 même méthode. Il résultera du choix de q_0
 que les s séries obtenues n'empièteront
 pas.

Soit n_k une suite d'entiers telle que
 $n_{k+1} / n_k \geq q > 1$ et a_k une suite telle que
 $\sum |a_k|^2 < \infty$. Il existe une fonction
 continue $f(x) \sim \sum \alpha_n \cos nx$ avec
 $\alpha_{n_k} = a_k$ [Banach l.c.].

Ceci résulte de la proposition suivante:

B. Soit n_k une suite d'entiers telle que
 $n_{k+1} / n_k \geq q > 1$ et c_k une suite telle que
 $\sum |c_k|^2 < \infty$. Il existe une fonction
 bornée $f(x) \sim \sum \gamma_n \cos nx$ avec $\gamma_{n_k} = c_k$.

En effet soit $\sum |a_k|^2 < \infty$, alors il
 existe une suite convexe $\varepsilon_n \rightarrow 0$ telle que
 $\sum |a_k / \varepsilon_{n_k}|^2 < \infty$. En vertu de la propo-

sition B il existe donc une fonction bornée ayant la série de Fourier $\sum f_n \cos nx$ avec $f_{n_k} = a_k / \varepsilon_{n_k}$. Mais alors $\sum \varepsilon_{n_k} f_{n_k} \cos nx$ est la série de Fourier d'une fonction continue et $\varepsilon_{n_k} f_{n_k} = a_k$ [Zygmund 104, 109].

Démonstration de la proposition B. Soit d'abord $n_{k+1} / n_k \geq q > 3$. Dans ce cas le développement formel du produit

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1 + i a_k \cos n_k x)$$

nous fournira la série cherchée, car ici encore le polynôme

$$p_N(x) = \prod_{k=1}^N (1 + i a_k \cos n_k x)$$

est une somme partielle de $p_{N+1}(x)$. En outre

$$|p_N(x)| \leq \left(\prod_{k=1}^N (1 + a_k)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = O(1)$$

donc [Zygmund 79, 87] la série est en effet la série de Fourier d'une fonction bornée.

Dans le cas général où $n_{k+1}/n_k \geq q > 1$ on décomposera la suite n_k en s suites partielles comme dans les démonstrations précédentes.

Il existe une fonction bornée dont la série de Fourier a des sommes partielles uniformément bornées partout mais diverge sur un ensemble ayant la puissance du continu [Zygmund, *Studia Mathematica*, 10 (1948) 113-119].

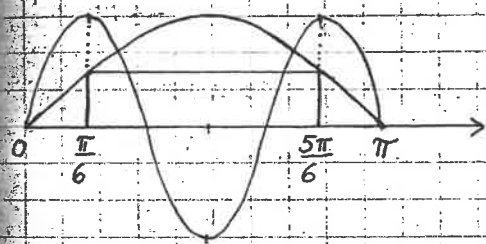
Rappelons d'abord le résultat suivant dû à Fatou [Zygmund, 130, p. 10]:
Si pour la série $\sum_1^\infty c_k \cos m_k x$,
 $m_{k+1}/m_k \geq q > 3$ et $\sum |c_k| = \infty$, alors ses sommes partielles ne sont pas bornées dans aucun intervalle. En effet soit donné l'intervalle (a, b) et considérons un indice k tel que l'ensemble E_k des points x de (a, b) , où

$$C_k \cos m_k x \geq \frac{|C_k|}{2}$$

ne soit pas vide. D'après la condition $m_{k+1} > 3m_k$ l'ensemble des points x de E_k où

$$C_{k+1} \cos m_{k+1} x \geq \frac{|C_{k+1}|}{2}$$

forme un ensemble non vide $E_{k+1} \subset E_k$ (voir fig.). En continuant



ainsi de suite on aura au point x_0 qui appartient à tous les ensembles E_j ($j = k, k+1, \dots$)

$$\sum_{j=k}^{\infty} C_j \cos m_j x_0 \geq \frac{1}{2} \sum_{j=k}^{\infty} |C_j| = \infty.$$

Considérons maintenant le produit de Riesz

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + i \frac{\cos 4^k x}{k} \right).$$

En développant formellement le produit on obtient une série trigonométrique S

car les différents termes ne se recouvrent pas. Le polynôme

$$p_m = \prod_1^m \left(1 + i \frac{\cos 4^k x}{k}\right)$$

est une somme partielle de p_{m+1} et puisque

$$|p_m| = \left\{ \prod_1^m \left(1 + \frac{1}{k^2}\right) \right\}^{\frac{1}{2}} = O(1),$$

S est la série de Fourier d'une fonction bornée.

Toutes les sommes partielles de S sont bornées. En effet $p_{m+1} - p_m$ est un polynôme d'ordre $4^{m+1} + 4^m + \dots + 4 \leq A 4^m$. D'autre part

$$p_{m+1} - p_m = i \frac{\cos 4^{m+1} x}{m+1}$$

donc

$$|p_{m+1} - p_m| \leq \frac{B}{m},$$

d'où il vient que les sommes partielles de $p_{m+1} - p_m$ sont majorées en module par

$$\frac{B}{m} \in \log(A 4^m) = O(1).$$

Pour $|z|$ assez petit on a

$$1+z = e^{z + O(|z|^2)}$$

donc

$$\prod_{k=1}^m \left(1 + \frac{i \cos 4^k x}{k}\right) = e^{i \sum_{k=1}^m \frac{\cos 4^k x}{k}} + O\left(\sum \frac{1}{k^2}\right)$$

Or, puisque $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$, les sommes partielles de $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 4^k x}{k}$ ne sont pas bornées dans aucun intervalle, c'est-à-dire l'ensemble où cette série diverge est un résiduel qui a donc la puissance du continu [cf. Zygmund 170]. Il en résulte que p_m diverge sur un ensemble ayant la puissance du continu, c.q.f.d.

Considérons une suite trigonométrique lacunaire

$$(17.1) \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos n_k x + b_k \sin n_k x$$

avec $n_{k+1}/n_k \geq q > 1$. Soit $S_N(x)$ la

N -ième somme partielle de la série (17, 1)

et soit $C_N = \sqrt{\frac{1}{2} \sum_{k=1}^N c_k^2}$ où $c_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$.

Supposons que $C_N \rightarrow \infty$ et que $C_N/E_N \rightarrow 0$,

lorsque $N \rightarrow \infty$. Désignons par $E_N(y)$

l'ensemble des points x de l'intervalle

$0 \leq x \leq 2\pi$ tels que $S_N/C_N \leq y$, et

soit $F'_N(y) = |E_N(y)|/2\pi$ la fonction

de distribution de $S_N(x)/C_N$. Nous

allons démontrer que $F'_N(y)$ tend vers

la distribution de Gauss.

En réalité nous démontrerons

un théorème plus général. Soit $\mathcal{E}$

un ensemble mesurable compris dans

l'intervalle $0 \leq x \leq 2\pi$ et tel que

$|\mathcal{E}| > 0$. Considérons la fonction de

distribution de $S_N(x)/C_N$ sur l'ensemble

$\mathcal{E}$: $F_N^{(\mathcal{E})}(y) = F'_N(y) = |E_N(y) \cap \mathcal{E}|/|\mathcal{E}|$.

Dans ce cas encore $F'_N(y)$ va

tendre vers la distribution de Gauss

[Salem et Zygmund, Proc. Nat. Ac. Sci. 33]

(1947), 333-338 et 34 (1948) 54-62].

Pour simplifier l'écriture considérons une série de cosinus

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos n_k x \quad n_{k+1}/n_k \geq q > 1$$

et soit $S_N(x) = \sum_{k=1}^N a_k \cos n_k x$, $A_N = \sqrt{\frac{1}{2} \sum_{k=1}^N a_k^2}$
où l'on suppose que $a_N/A_N \rightarrow 0$, $A_N \rightarrow \infty$
pour $N \rightarrow \infty$.

Remarquons d'abord qu'on a aussi

$$\frac{\max_{1 \leq k \leq N} |a_k|}{A_N} \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty)$$

Lorsque les $|a_N|$ sont bornés ceci résulte d'une façon évidente de ce que $A_N \rightarrow \infty$. Lorsque les $|a_N|$ ne sont pas bornés soit $|a_{M(N)}| = \max_{1 \leq k \leq N} |a_k|$, évidemment $M(N) \rightarrow \infty$ pour $N \rightarrow \infty$, on a donc

$$\frac{|a_M|}{A_N} = \frac{|a_M|}{A_M} \frac{A_M}{A_N} \rightarrow 0$$

puisque $|a_M|/A_M \rightarrow 0$ et $A_M/A_N \leq 1$.

Pour démontrer le théorème il faut prouver que la fonction caractéristique de

$F'_N(y)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda y} dF_N(y)$$

tend vers $e^{-\lambda^2/2}$ uniformément dans tout intervalle borné $\lambda_0 \leq \lambda \leq \lambda_1$.

En vertu de la formule

$$\int_{\mathcal{E}} \varphi[f(x)] dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) dm(y)$$

où $m(y) = |E[f(x) \leq y; x \in \mathcal{E}]|$, qui transforme l'intégrale de Lebesgue en une intégrale de Riemann-Stieltjes, on a

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda y} dF_N(y) = \frac{1}{|\mathcal{E}|} \int_{\mathcal{E}} e^{i\lambda \frac{S_N(x)}{A_N}} dx.$$

Pour $|z| \leq \frac{1}{2}$ on a

$$\log(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + O(|z|^3)$$

c'est-à-dire

$$e^z = (1+z) e^{\frac{z^2}{2} + O(|z|^3)}$$

où $O(|z|^3)$ désigne une fonction en module inférieure à $C|z|^3$. On obtient ainsi

$$e^{i\lambda \sum_{k=1}^N \frac{a_k \cos n_k x}{A_N}} =$$

$$= \prod_{k=1}^N \left(1 + i\lambda \frac{a_k \cos n_k x}{A_N} \right) \cdot e^{-\frac{\lambda^2}{2} \sum_{k=1}^N \frac{a_k^2 \cos^2 n_k x}{A_N^2} + O\left(\frac{\sum |a_k|^3}{A_N^3}\right)}$$

ou

$$O\left(\frac{\sum |a_k|^3}{A_N^3}\right) = O\left(\frac{\max_{1 \leq k \leq N} |a_k|}{A_N} \cdot \frac{\sum |a_k|^2}{A_N^2}\right) = o(1)$$

en vertu de la remarque p. 19. et $\sum_{k=1}^N |a_k|^2 / A_N^2 = 2$.

On a aussi

$$\left| \prod_{k=1}^N \left(1 + i\lambda \frac{a_k \cos n_k x}{A_N} \right) \right| \leq \prod_{k=1}^N \left(1 + \frac{\lambda^2 a_k^2}{A_N^2} \right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq e^{\lambda^2 \frac{\sum_{k=1}^N a_k^2}{2 A_N^2}} = e^{\lambda^2}$$

Il faut donc démontrer que

$$I = \frac{1}{|\mathcal{E}|} \int_{\mathcal{E}} \prod_{k=1}^N \left(1 + i\lambda \frac{a_k \cos n_k x}{A_N} \right) e^{-\frac{\lambda^2}{2} \sum_{k=1}^N \frac{a_k^2 \cos^2 n_k x}{A_N^2}} dx$$

tend vers $e^{-\lambda^2/2}$ uniformément dans tout intervalle borné $\lambda_0 \leq \lambda \leq \lambda_1$.

Par la formule $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$ on a

$$\sum_{k=1}^N \frac{a_k^2 \cos^2 n_k x}{A_N^2} = \sum_{k=1}^N \frac{a_k^2}{2A_N^2} + \sum_{k=1}^N \frac{a_k^2 \cos 2n_k x}{2A_N^2} =$$

$$= 1 + \sigma_N(x).$$

Soit G l'ensemble des points $x \in E$ tels que $|\sigma_N(x)| \geq \delta$ pour un $\delta > 0$ fixé. On a alors par la relation de Parseval

$$|G| \delta^2 \leq \int_0^{2\pi} \sigma_N^2(x) dx = \pi \frac{\sum_{k=1}^N |a_k|^4}{4A_N^4}$$

c'est-à-dire

$$|G| \leq \frac{\rho_N}{\delta^2}$$

où $\rho_N \rightarrow 0$ pour $N \rightarrow \infty$. Écrivons donc

$$I = \frac{1}{|E|} \int_E = \frac{1}{|E|} \int_G + \frac{1}{|E|} \int_{E-G} = I_1 + I_2,$$

alors on aura $|I_1| \leq B \frac{\rho_N}{\delta^2}$ et dans I_2

l'exposant de e sera égal à $-\frac{\lambda^2}{2} - \frac{\lambda^2}{2} \sigma_N(x)$ avec $|\sigma_N(x)|$, d'où

$$I = \frac{1}{\mathcal{E}} \int_{\mathcal{E}} \prod_{k=1}^N \left(1 + i\lambda \frac{a_k \cos n_k x}{A_N} \right) e^{-\frac{\lambda^2}{2}} dx + \eta(\delta)$$

où $\eta(\delta)$ tend uniformément vers zéro dans $\lambda_0 \leq \lambda \leq \lambda_1$ lorsque $N \rightarrow \infty$. Finalement il faut donc démontrer que

$$J_N = \frac{1}{|\mathcal{E}|} \int_{\mathcal{E}} \prod_{k=1}^N \left(1 + i\lambda \frac{a_k \cos n_k x}{A_N} \right) dx \rightarrow 1$$

uniformément dans $\lambda_0 \leq \lambda \leq \lambda_1$. Lorsque l'ensemble $\mathcal{E}$ est identique à l'intervalle $(0, 2\pi)$ et que $n_{k+1}/n_k \geq q \geq 2$ ceci est immédiat car alors $n_k \pm n_{k-1} \pm \dots = 0$ ne peut être satisfait qu'avec tous les n_k égaux à 0, donc les termes non-constants dans le produit n'interféreront pas avec la constante 1 et on aura identiquement $J_N = 1$.

Soit donc $\mathcal{E}$ arbitraire et supposons que $n_{k+1}/n_k \geq q > 3$. Écrivons

$$(1) \quad \prod_{k=1}^N \left(1 + i\lambda \frac{a_k \cos n_k x}{A_N} \right) = \alpha_0^{(N)} + \sum_{\nu=1} \alpha_\nu^{(N)} \cos \nu x$$

où $\alpha_\nu^{(N)}$ dépend bien-entendu de λ et où

$\alpha_0^{(N)} = 1$. En désignant par $\chi(x)$ la fonction caractéristique de l'ensemble E soit

$$\chi(x) \sim \frac{|E|}{2\pi} + \sum_{\nu=1}^{\infty} h_{\nu} \cos \nu x + h'_{\nu} \sin \nu x,$$

on a donc par la formule de Parseval:

$$J_N = 1 + \frac{\pi}{|E|} \sum_{\nu} h_{\nu} \alpha_{\nu}^{(N)}.$$

les $\alpha_{\nu}^{(N)}$ sont de la forme

$$\alpha_{\nu}^{(N)} = \frac{1}{2^p} \frac{a_{i_1}}{A_N} \cdots \frac{a_{i_p}}{A_N} i^p \lambda^p$$

donc en vertu de la remarque p. 19.

$\alpha_{\nu}^{(N)} \rightarrow 0$ pour $N \rightarrow \infty$ ($\nu = 1, 2, 3, \dots$). Ainsi

en posant

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} h_{\nu} \alpha_{\nu}^{(N)} = \sum_{\nu=0}^{\nu_0} h_{\nu} \alpha_{\nu}^{(N)} + \sum_{\nu=\nu_0+1}^{\infty} h_{\nu} \alpha_{\nu}^{(N)}$$

la somme $\sum_{\nu=0}^{\nu_0}$ tend uniformément vers zéro lorsque $N \rightarrow \infty$ quel que soit ν_0 fixé.

D'autre part en vertu de (21,1), (23,1) et la relation de Parseval on a

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |\alpha_{\nu}^{(N)}|^2 \leq C,$$

donc

$$\begin{aligned}
 \left| \sum_{\nu=\nu_0+1}^{\infty} h_{\nu} \alpha_{\nu}^{(N)} \right| &\leq \left(\sum_{\nu_0+1}^{\infty} |\alpha_{\nu}^{(N)}|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{\nu_0+1}^{\infty} h_{\nu}^2 \right)^{1/2} \leq \\
 &\leq C \left(\sum_{\nu_0+1}^{\infty} h_{\nu}^2 \right)^{1/2} < \varepsilon
 \end{aligned}$$

quel que soit $\varepsilon > 0$ si seulement ν_0 est suffisamment grand. On a donc en effet

$T_N \rightarrow 1$ uniformément dans $\lambda_0 \leq \lambda \leq \lambda_1$.

Considérons maintenant le cas général où $n_{k+1}/n_k \geq q > 1$. Dans ce cas on divisera ~~la~~ la somme $i\lambda \frac{S_N}{A_N}$ en blocs de s termes

$$\Delta_1 = \sum_{k=1}^s \frac{i\lambda a_k \cos n_k x}{A_N},$$

$$\Delta_2 = \sum_{k=s+1}^{2s} \frac{i\lambda a_k \cos n_k x}{A_N}$$

.....

où s est un nombre fixe qu'on va déterminer plus loin. Des raisonnements analogues à ceux qu'on vient de faire montrent qu'il faut prouver que la relation

$$J_N = \frac{1}{|\mathcal{E}|} \int_{\mathcal{E}} \prod_{h=1}^M (1 + \Delta_h) dx \rightarrow 1$$

subsiste uniformément dans $\lambda_0 \leq \lambda \leq \lambda_1$.

Écrivons encore

$$\prod_{h=1}^M (1 + \Delta_h) = \alpha_0^{(N)} + \sum_{\nu=1} \alpha_{\nu}^{(N)} \cos \nu x.$$

Cherchons à déterminer le nombre des solutions de l'équation

$$(26,1) \quad \nu = n_{k_1} \pm n_{k_2} \pm \dots$$

où $k_1 > k_2 > k_3 > \dots$ sont pris dans des parenthèses différentes. On a

$$n_{k_1} \pm n_{k_2} \pm n_{k_3} \pm \dots >$$

$$> n_{k_1} \left(1 - \frac{1}{q} - \frac{1}{q^s} - \frac{1}{q^{2s}} - \dots \right)$$

$$= n_{k_1} \left(1 - \frac{1}{q} - \frac{1}{q^s - 1} \right)$$

et

$$n_{k_1} \pm n_{k_2} \pm n_{k_3} \pm \dots <$$

$$< n_k \left(1 + \frac{1}{q} + \frac{1}{q^s} + \frac{1}{q^{2s}} + \dots \right)$$

$$= n_k \left(1 + \frac{1}{q} + \frac{1}{q^{s-1}} \right),$$

donc, puisque $q > 1$, en choisissant $s = s(q)$ suffisamment grand

$$n_{k_1} \delta_2 > n_{k_1} \pm n_{k_2} \pm \dots > n_{k_1} \delta_1 > 0$$

où $\delta_1 = \delta_1(s)$ et $\delta_2 = \delta_2(s)$ sont > 0 . On a

donc

$$n_{k_1} \delta_1 < \nu < n_{k_2} \delta_2,$$

ou encore

$$\frac{\nu}{\delta_2} < n_{k_1} < \frac{\nu}{\delta_1},$$

donc le nombre des n_{k_1} qui peuvent figurer dans le deuxième membre de (26, 1) est égal

à $C = C(q) \sim \log \delta_1 / \delta_2$. Il en résulte que l'équation avec p termes au deuxième membre

$$\nu = n_{k_1} \pm n_{k_2} \pm \dots \pm n_{k_p}$$

a au plus C^p solutions. Si l'on choisit

ν assez grand, on a par la remarque faite à

la page 19, $|a_k|/A_N < \varepsilon$ quel que soit $\varepsilon > 0$,
d'où on voit que

$$|\alpha_{\nu}^{(N)}| < \varepsilon C + \varepsilon^2 C^2 + \varepsilon^3 C^3 + \dots = \frac{\varepsilon C}{1 - \varepsilon C} = o(1)$$

pour $N \rightarrow \infty$ ($\nu = 1, 2, 3, \dots$). La démonstration
s'achève maintenant comme dans le cas
précédent.

Considérons une série trigonométrique
lacunaire, que nous allons prendre sous la
forme d'une série de cosinus pour simplifier
l'écriture,

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos n_k x \quad n_{k+1}/n_k \geq q > 1$$

Soit $A_N = \sqrt{\frac{1}{2} \sum_{k=1}^N a_k^2}$ et supposons que
 $A_N \rightarrow \infty$, $a_N = o\left(\sqrt{\frac{A_N^2}{\log \log A_N}}\right)$. Dans ces
conditions on a

$$(28,1) \quad \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{S_N(x)}{\sqrt{2 A_N^2 \log \log A_N}} \leq 1$$

presque partout dans l'intervalle $0 \leq x \leq 2\pi$.

Un raisonnement analogue à celui de la page 19 montre qu'on a aussi

$$\max_{1 \leq k \leq N} |a_k| = M_N = O \sqrt{\frac{A_N^2}{\log \log A_N}}.$$

Pour démontrer la relation (28,1) on se restreint d'abord à une sous-suite N_j choisie d'une façon convenable et puis on passe à la suite complète. Soit θ un nombre, $\theta > 1$ arbitraire mais fixe. On choisira N_j de sorte qu'on ait

$$\theta^j \leq 2A_{N_j}^2 < \theta^{j+1}$$

pour j assez grand. Ceci est possible car si (θ^j, θ^{j+1}) est un intervalle vide ^(de nombres $2A_{N_j}^2$) tel que $(\theta^{j+1}, \theta^{j+2})$ ne le soit plus, alors on a pour un indice m

$$2A_m^2 < \theta^j \quad \text{et} \quad \theta^{j+1} \leq 2A_{m+1}^2 < \theta^{j+2},$$

donc

$$a_{m+1}^2 = 2A_{m+1}^2 - 2A_m^2 \geq \theta^{j+1} - \theta^j$$

$$\frac{a_{m+1}^2}{A_{m+1}^2} > \frac{\theta^{j+1} - \theta^j}{\theta^{j+2}} \geq \frac{\theta - 1}{\theta^2} > 0$$

ce qui peut arriver seulement en un nombre

fini des cas en vertu de l'hypothèse $\frac{a_N^2}{A_N^2} = o\left(\frac{1}{\log \log A_N}\right)$.

Il faut donc démontrer que

$$(1) \quad \limsup_{j \rightarrow \infty} \frac{S_{N_j}(x)}{\sqrt{2A_{N_j}^2 \log \log A_{N_j}}} \leq 1$$

et ceci résultera de l'inégalité

$$(2) \quad \int_0^{2\pi} e^{\lambda S_N(x)} dx \leq 2\pi e^{\frac{\lambda^2 A_N^2}{2} + C \lambda^3 A_N^2 M_N}$$

où C est une constante absolue et qui est vérifiée pour $\lambda M_N < \frac{1}{2}$.

En effet on a

$$\int_0^{2\pi} e^{\lambda S_N(x) - T_N} dx \leq 2\pi e^{\frac{\lambda^2 A_N^2}{2} + C \lambda^3 A_N^2 M_N - T_N}$$

Choisissons maintenant

$$\lambda_N = \frac{\sqrt{2 \log \log A_N}}{A_N}, \quad T_N = \gamma \log \log A_N$$

où γ sera fixé plus bas. En vertu de

$$M_N = o\left(\sqrt{\frac{A_N^2}{\log \log A_N}}\right) \text{ on a } \lambda_N M_N = o(1),$$

pour $N \geq N_0$ on peut donc appliquer l'inégalité précédente. On a

$$\begin{aligned} C \lambda_N^3 A_N^2 M_N &= C \frac{(2 \log \log A_N)^{3/2}}{A_N^3} A_N^2 o\left(\frac{A_N}{\sqrt{\log \log A_N}}\right) = \\ &= o(\log \log A_N), \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} e^{\lambda_N S_N(x) - T_N} &\leq 2\pi e^{\log \log A_N + o(\log \log A_N) - \gamma \log \log A_N} \\ &= 2\pi e^{(1 - \gamma + o(1)) \log \log A_N} = \\ &= 2\pi e^{(-1 - 3\varepsilon + o(1)) \log \log A_N} \leq \\ &\leq 2\pi e^{(-1 - 2\varepsilon) \log \log A_N} \end{aligned}$$

pour N assez grand, si l'on a posé $\gamma = 2 + 3\varepsilon$

pour un $\varepsilon > 0$ arbitraire. Or $\log \log A_N \sim \log j$,

donc

$$\int_0^{2\pi} e^{\lambda_{N_j} S_{N_j}(x) - T_{N_j}} dx \leq 2\pi e^{\log j \cdot (-1-\varepsilon)} = \frac{2\pi}{j^{1+\varepsilon}}$$

et

$$\sum_{j=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} e^{\lambda_{N_j} S_{N_j}(x) - T_{N_j}} dx \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2\pi}{j^{1+\varepsilon}} < \infty$$

il en résulte que

$$\sum_{j=1}^{\infty} e^{\lambda_{N_j} S_{N_j}(x) - T_{N_j}}$$

converge presque partout, donc en particulier que

$$\lambda_{N_j} S_{N_j}(x) - T_{N_j} \leq 0$$

presque partout pour j assez grand, ou encore

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} \frac{\lambda_{N_j} S_{N_j}(x)}{T_{N_j}} \leq 1.$$

Mais

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_{N_j} S_{N_j}(x)}{T_{N_j}} &= S_{N_j}(x) \frac{\sqrt{2 \log \log A_{N_j}}}{A_{N_j}} \frac{1}{(2+3\varepsilon) \log \log A_{N_j}} \\ &= S_{N_j}(x) \frac{1}{\left(1 + \frac{3\varepsilon}{2}\right) \sqrt{2 A_{N_j}^2 \log \log A_{N_j}}} \end{aligned}$$

donc

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} \frac{S_{N_j}(x)}{\sqrt{2 A_{N_j}^2 \log \log A_{N_j}}} \leq 1 + \frac{3\varepsilon}{2},$$

et puisque ε est arbitraire ceci donne (30, 1).

Il reste donc à démontrer l'inégalité (30, 2). Pour $|z| \leq \frac{1}{2}$ on a

$$\begin{aligned} \log \left(1 + z + \frac{z^2}{2}\right) &= \left(z + \frac{z^2}{2}\right) - \frac{1}{2} \left(z + \frac{z^2}{2}\right)^2 + O\left|z + \frac{z^2}{2}\right|^3 \\ &= z^2 + O(|z|^3) \end{aligned}$$

où $O(|z|^3)$ désigne une fonction inférieure à $C|z|^3$, C étant une constante absolue. Autrement dit

$$e^z = \left(1 + z + \frac{z^2}{2}\right) e^{O(|z|^3)}$$

par conséquent (pour $\lambda_{M_N} < \frac{1}{2}$)

$$e^{\lambda S_N(x)} \leq \prod_{k=1}^N \left(1 + \lambda a_k \cos n_k x + \frac{\lambda^2 a_k^2 \cos^2 n_k x}{2} \right) e^{O(\lambda^3 \sum_{k=1}^N |a_k|^3)}$$

$$\text{Or } \sum_{k=1}^N |a_k|^3 \leq M_N \sum_{k=1}^N |a_k|^2 = M_N 2 A_N^2$$

donc

$$\int_0^{2\pi} e^{\lambda S_N(x)} dx \leq C \lambda^3 A_N^2 M_N \int_0^{2\pi} \prod_{k=1}^N \left(1 + \lambda a_k \cos n_k x + \frac{\lambda^2 a_k^2 \cos^2 n_k x}{2} \right) dx$$

Il faut donc calculer l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} \prod_{k=1}^N \left(1 + \frac{\lambda^2 a_k^2}{4} + \lambda a_k \cos n_k x + \frac{\lambda^2 a_k^2 \cos^2 n_k x}{4} \right) dx.$$

Supposons d'abord $n_{k+1}/n_k \geq q > 3$. Dans le polynôme trigonométrique sous le signe d'intégrale on aura des termes d'ordre

$$v = \varepsilon_0 n_{k_\varepsilon} + \varepsilon_1 n_{k-1} + \varepsilon_2 n_{k-2} + \dots$$

$\varepsilon = -2, -1, 0, 1, 2$ Mais

$$V = \varepsilon_0 n_k + \varepsilon_1 n_{k-1} + \varepsilon_2 n_{k-2} + \dots$$

$$\geq n_k \left(1 - \frac{2}{q} - \frac{2}{q^2} + \dots \right) =$$

$$= n_k \left(1 - \frac{2}{q-1} \right) = n_k \frac{q-3}{q-1} > 0$$

Donc le terme constant du polynome sera égal à

$$\prod_{k=1}^N \left(1 + \frac{\lambda^2 a_k^2}{4} \right)$$

et par suite

$$\int_0^{2\pi} \prod_{k=1}^N \left(1 + \frac{\lambda^2 a_k^2}{4} \right) dx = 2\pi \prod_{k=1}^N \left(1 + \frac{\lambda^2 a_k^2}{4} \right)$$

$$\leq 2\pi e^{\frac{\lambda^2}{4} \sum_{k=1}^N a_k^2} =$$

$$= 2\pi e^{\frac{\lambda^2 A_N}{2}}$$

Peigné, Jacques. Sur les produits de Riez. C.R. Acad. Sci.

Paris Sér. A-B 276 (1973), A1417-A1419. MR 47 #5512

Étude de quelques propriétés des produits de Riez.

Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 25 (1975), 127-169.